

Differenciálszámítás

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS BEVEZETÉSE

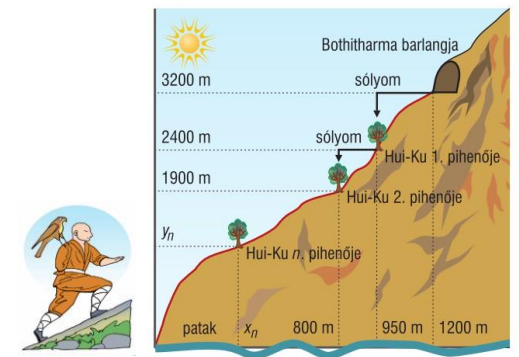
Összeállította: Bölcsföldi Tünde (bolcsfoldi-matek.webnode.hu).
Forrás: Sokszínű matematika - Az analízis elemei [Mozaiik Kiadó]

Bevezető példák:

1. példa

Bothitharma kilenc éven át meditált a Shongszan hegyen lévő barlangjában, annak falára meredve. A hagyomány szerint tekintete erejével lyukat fúrt a barlang falán. A lyukon keresztül nézte, ahogy kedvenc tanítványa, Hui-Ku tart lefelé a hegygerincen. Hui-Ku vállán mindig ott ült kedvenc sólyma. A sólyom, amikor gazdája elindult, felszállt a válláról és nyílegyenesen repült vízszintesen előre. Ha Hui-Ku megpihent, a sólyom a rá jellemző függőleges zuhanórepülésben visszaszállt a vállára. Min töprenghetett Bothitharma Hui-Ku solymát látva?

Bothitharma egy shaolin kolostor apátja volt, nevéhez fűződik (Kr. u. 600 körül) a zen buddhizmus megalapítása. Ő találta ki a kungfu alapmozdulatait a meditáció közben elsorvadt izmok karbantartására.



1. ábra

Megoldás

Bothitharma barlangja a hegy lábától függőlegesen 3200 m-re, vízszintesen pedig 1200 m-re van (1. ábra). Azon elmélkedik, hogy Hui-Ku különböző pihenőhelyeire milyen meredek út visz a barlangból. Hui-Ku első pihenőhelye a hegy lábától 950 m-re található vízszintesen és 2400 m-re függőlegesen. Bothitharma arra gondol, hogy amíg Hui-Ku ereszkedik a hegygerincen lefelé, addig a madár az első pihenőhelyig vízszintesen 1200–950 m, függőlegesen 3200–2400 m utat tesz meg.

A függőlegesen és vízszintesen megtett utak aránya $\frac{3200 - 2400}{1200 - 950}$.

A különbségek hányadosa a barlangot és az első pihenőhelyet összekötő szakasz meredeksége. A második pihenőhelyig a sólyom a barlangtól összesen 1200–800 m-t tesz meg vízszintesen és 3200–1900 m-t

függőlegesen, a különbségek hányadosa $\frac{3200 - 1900}{1200 - 800}$. Ennyi a második

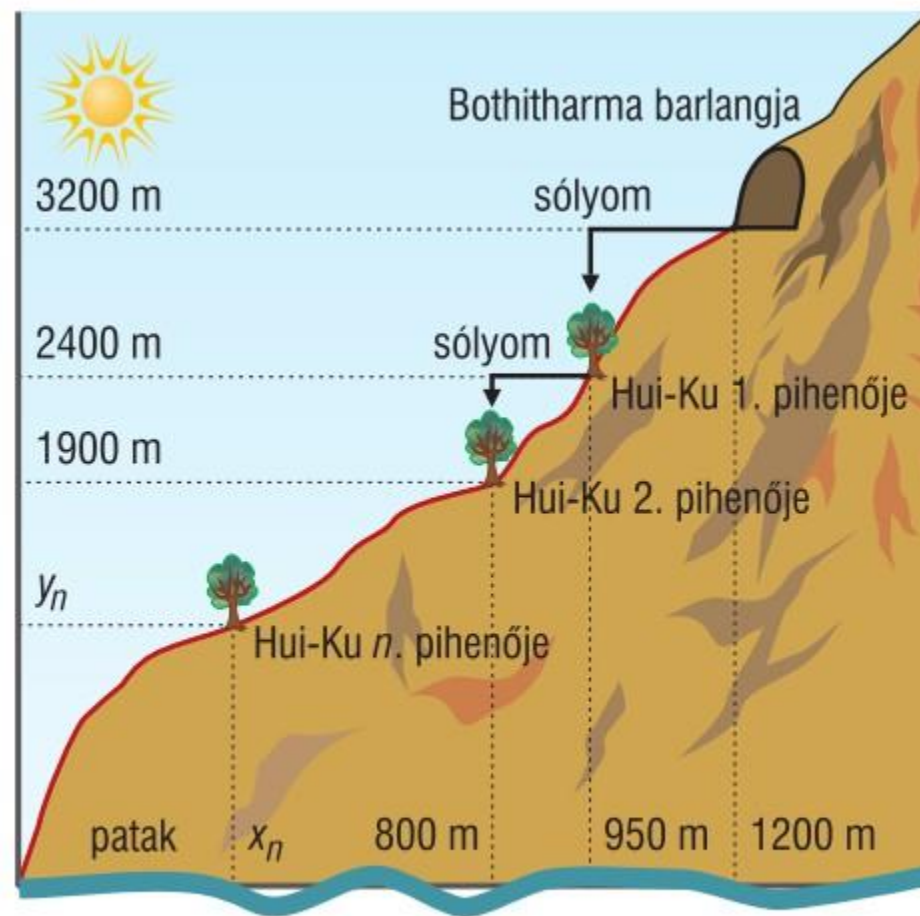
pihenőhely és a barlang száját összekötő szakasz meredeksége. A további pihenőhelyek pontos helyét nem ismerő Bothitharma így gondolkodik:

„Ha az n -edik pihenőhely a hegy lábától x_n távolságra van vízszintesen, és y_n távolságra függőlegesen, akkor vízszintesen $1200 - x_n$, függő-

legesen $3200 - y_n$ távolságot tesz meg a sólyom. Így $\frac{3200 - y_n}{1200 - x_n}$

Hui-Ku útjának meredeksége.”

Megjegyzés: A barlang bejáratát $(x_0; y_0)$ -al jelölve az utak meredeksége $\frac{y_0 - y_n}{x_0 - x_n}$.



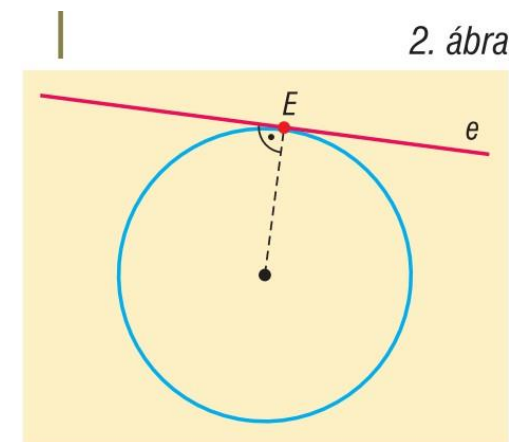
1. ábra

2. példa

Leibniz problémája: Határozzuk meg egy parabola egyik pontjában, esetünkben az $f(x) = x^2$ valós függvény $(2; 4)$ pontjában húzott érintő egyenletét.

Megjegyzés: Igen ám, de mit értünk *érintő* alatt? Általános iskolában a kör esetén úgy határoztuk meg, hogy az érintő olyan egyenes, amelynek pontosan egy közös pontja van a körrel (**2. ábra**). Mi a helyzet a parabolával, vagy speciálisan az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjával?

A görbének minden y tengellyel – a függvény szimmetriatengelye – párhuzamos egyenessel egy közös pontja van. Sőt, $g(x) = |x|$ függvény „csúcsában” nemcsak a szimmetriatengellyel párhuzamos egyeneseivel van egy közös pontja, hanem



az origón átmenő összes olyan egyenessel, amelynek irányszöge nem 45° vagy 135° . Az is lehet, hogy az egyenes szelő (döfi a görbét) és érintő egyben, pl. $h(x) = \sin x$ függvénynél (3. ábra). Mivel a pontos meghatározás nem is olyan egyszerű, maradjunk egyelőre az érintő szemléletes fogalmánál.

Térjünk vissza $f(x) = x^2$ -hez, és próbáljuk felírni a $(2; 4)$ pontjában húzott érintő egyenletét! Tudjuk, hogy az érintőnek át kell haladnia a görbe $(2; 4)$ pontján, csak meredekségét nem ismerjük. Tehát egyenlete $y = m(x - 2) + 4$.

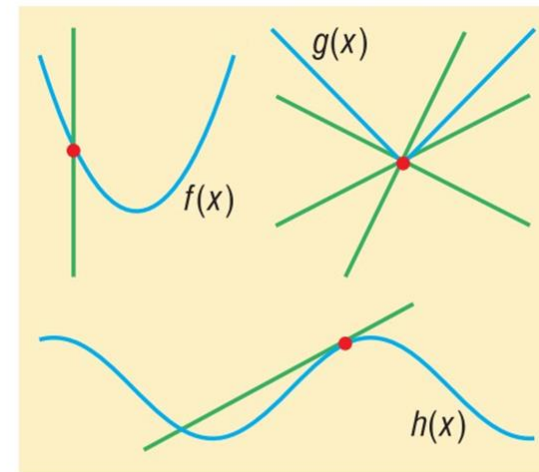
Vegyünk a $(2; 4)$ ponton átmenő szelők egy olyan sorozatát, amelyek áthaladnak az $(x_n; x_n^2)$ parabolaponton. Közelítsük ezt a pontot a $(2; 4)$

ponthoz. A szelők iránytangensei ekkor $\operatorname{tg}(\alpha_n) = \frac{x_n^2 - 2^2}{x_n - 2}$ sorozatot alkotnak. Mi lehet a $\operatorname{tg}(\alpha_n)$ sorozat határértéke? (4. ábra)

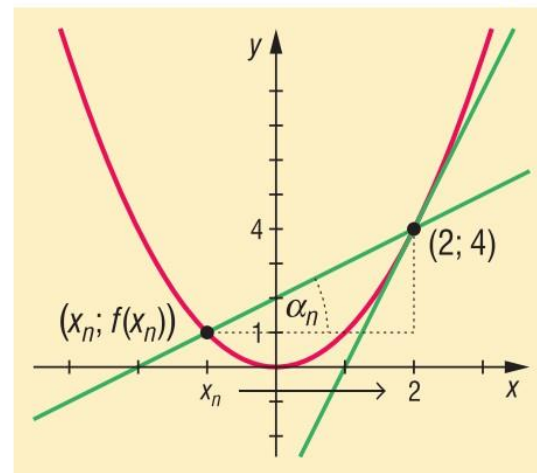
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}(\alpha_n) &= \lim_{x_n \rightarrow 2} \frac{x_n^2 - 2^2}{x_n - 2} = \lim_{x_n \rightarrow 2} \frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{x_n - 2} = \\ &= \lim_{x_n \rightarrow 2} (x_n + 2) = 4. \end{aligned}$$

A szelők meredekségének van véges határértéke, így az érintő egyenlete:

$$y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4.$$



3. ábra



4. ábra

Megjegyzés: Az érintő egyenletét kiszámíthattuk volna másképp is. Mivel az érintőnek egy közös pontja van a görbével, ezért a következő egyenletrendszernek egy megoldást kell adnia:

$$\left. \begin{array}{l} y = m(x - 2) + 4 \\ y = x^2 \end{array} \right\}.$$

Ez pont akkor teljesül, ha az $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0:

$$D = m^2 - 8m + 16 = 0 \Rightarrow m = 4.$$

(Azért nincs két megoldás, mert a függőleges egyenesnek nincs meredeksége.)

Az eljárás bármely adott $(x_0; f(x_0))$ pontban elvégezhető. Tekintsük általában az $(x_n; f(x_n))$, $(x_0; f(x_0))$ pontok által meghatározott szelők hányadosaiból képezett sorozat határértékét, vagyis a

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x_n \rightarrow x_0} \operatorname{tg}(\alpha_n)$$

határérték-feladatot. Ha ez a határérték létezik és véges, akkor ezt tekinthetjük az $f(x)$ függvény $(x_0; f(x_0))$ pontjába húzott érintő meredekségének. Ha a határérték nem létezik vagy végtelen, akkor a görbének a pontban nincs érintője. Úgy is meg szokták fogalmazni, hogy *az érintő a szelők határhelyzete*.

Ezt már tekinthetjük az érintő szemléletes definíciójának is.

3. példa

A szokásos jelöléseket használva, az autó t idő alatt $s(t)$ utat tesz meg. A megtett út az időtől függ, *a sebesség pedig az egységnyi időtartam alatt megtett út*. Mit értsünk azonban pillanatnyi sebesség alatt? Hogyan határozzuk meg autónk sebességét t időpontban?

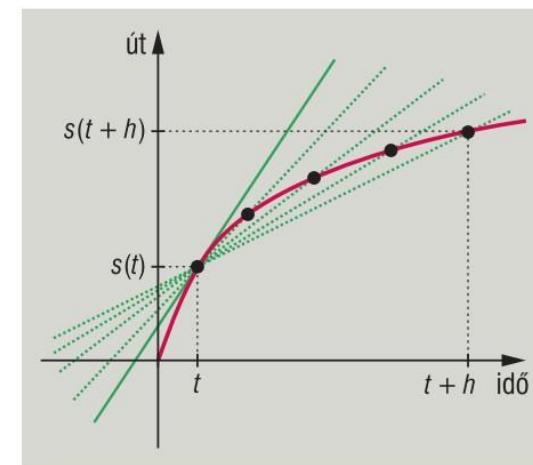
Megoldás

Végezzünk egy gondolkísérletet! Menjünk előre az időben valamennyit, és állapítsuk meg, hogy ez alatt mekkora utat tettünk meg.

A $h > 0$ idő alatt, t -től $(t + h)$ -ig megtett út $s(t + h) - s(t)$. Mivel a sebesség az egységnyi idő alatt megtett út, ezért az $\frac{s(t + h) - s(t)}{h}$

hányados pontosan ezt a sebességet adja meg (5. ábra). A hányados azonban függ h -tól! A t időpontbeli sebességet akkor kapjuk meg, ha h a lehető legkisebb, azaz $h \rightarrow 0$. Így a pillanatnyi sebesség pon-

tosan $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h}$ határérték, amennyiben az létezik és véges.



5. ábra

Foglaljuk össze tapasztalatainkat!

Az első két példában különbségek hányadosait $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ formában vizsgáltuk. Azt kerestük, hogy ezen sorozatoknak van-e határértéke adott x_0 pontban. Gyakorlatilag $F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvény x_0 -beli határértékét számoljuk, ha $x \rightarrow x_0$ ($x \neq x_0$).

Harmadik példánkban $t = x_0$, $x_n - x_0 = h$ jelölésekkel

$$x_n = x_0 + h \quad \text{és} \quad \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = \frac{s(x_n) - s(x_0)}{x_n - x_0}.$$

(Újra $F(x)$ -nek megfelelő formáról van szó.) Itt $h \rightarrow 0$ jelenti azt, hogy $x_n \rightarrow x_0$.

Minden példában ugyanazt a „forró kását” kerülgetjük.

Differenciahányados fogalma:

4.1. DEFINÍCIÓ: Ha $f(x)$ függvény értelmezve van x és x_0 ($x \neq x_0$) helyeken, akkor a $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényt az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli *differenciahányadosának** nevezzük.

A differenciahányados tehát egy függvény, amelynek értelmezési tartományára $D_g = D_f \setminus \{x_0\}$.

Differenciálhányados fogalma:

4.2. DEFINÍCIÓ: Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 pontban és annak valamely I környezetében értelmezve. Ha létezik és véges a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték ($x \in I$, $x \neq x_0$), akkor ezt a határértéket $f(x)$ függvény x_0 pontbeli *differenciálhányadosának** hívjuk, $f(x)$ -et pedig x_0 -ban *differenciálhatónak* (*deriválhatónak*) nevezzük.

Jelölése:

$$f'(x_0), \dot{f}(x_0), \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}, \left. \frac{\Delta f}{\Delta x} \right|_{x=x_0}.$$

További példák:

4. példa:

Differenciálható-e az $f(x)=c$ függvény?

Megoldás

Az $f(x) = c$ konstansfüggvény minden x_0 helyen differenciálható, ugyanis egy tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ pontra differenciálhányadosa:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

5. példa:

Differenciálható-e az $g(x)=x$ függvény?

Megoldás

A $g(x) = x$ függvény bármely $x_0 \in \mathbb{R} = D_g$ pontra differenciálható, ugyanis differenciáhányadosa:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

6. példa:

Differenciálható-e az $h(x)=x^2$ függvény?

Megoldás

A bevezetőben vizsgált $h(x) = x^2$ függvény bármely $x_0 \in \mathbb{R} = D_h$ pontban differenciálható, ugyanis

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Megjegyzés: Korábban már elemeztük az $y = x^2$ függvényt. A fenti eredménybe helyettesítve $x_0 = 2$ -t, természetesen most is $2 \cdot 2 = 4$ a differenciálhányados.

Maradva utolsó példánknál, képzeljük el, hogy a $h(x) = x^2$ függvény differenciálhányadosát minden valós x_0 helyen meghatároztuk, és mindenhol $2x_0$ -t kaptunk eredményül. Így létrejött egy újabb függvény, amelynek hozzárendelési szabálya $x_0 \rightarrow 2x_0$, értelmezési tartománya D_h azon részhalmaza, ahol $h(x)$ differenciálható, vagyis $\mathbb{R}$. Ez a függvény persze szoros kapcsolatban van $h(x)$ -szel.

Deriváltfüggvény fogalma:

4.5. DEFINÍCIÓ: Legyen az $f(x)$ egy függvény és $D' \subseteq D_f$ azon pontok halmaza, ahol $f(x)$ differenciálható. Az $f(x)$ *differenciálhányados-függvényének, deriváltfüggvényének vagy deriváltjának* nevezzük, és $f'(x)$ -szel jelöljük azt a függvényt, amely D' pontjaiban az $f(x)$ függvény differenciálhányados-értékeit veszi fel.